I

$\mathcal{E}_2$ est un espace affine euclidien sur $\mathbb{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé O, $\vec{i_1}$, $\vec{i_2}$, d'axes O_{x_1}, O_{x_2}.

1° A tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on associe la courbe C_λ admettant le paramétrage suivant sur $\mathbb{R}$:

$$u \longrightarrow \overrightarrow{OM} = \lambda u\, \vec{i_1} + \frac{1}{2}(u^2 - \lambda^2)\, \vec{i_2}$$

Construire C_λ.

2° Pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+$, C'_μ est la courbe symétrique de C_μ par rapport à l'axe O_{x_1}. Trouver les coordonnées des points d'intersection de C_λ et C'_μ. Démontrer que l'angle des tangentes à C_λ et C'_μ en chacun de leurs points d'intersection est indépendant de λ et de μ, et préciser sa valeur.

En déduire une propriété remarquable des deux familles de courbes $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ et $\{C'_\mu\}_{\mu \in \mathbb{R}_+}$.

II

$\mathbb{R}_+^*$ désignant l'ensemble des réels > 0, A est le produit cartésien :

$$A = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$$

φ est l'application de A dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\varphi : (u_1, u_2) \longrightarrow (x_1, x_2) = \left(u_1 u_2, \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}\right).$$

1° Déterminer $B = \varphi(A)$ et vérifier que φ est une bijection de A sur B, de classe C^∞, en donnant $\varphi^{-1}(x_1, x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in B$.

2° Écrire la matrice jacobienne J de φ au point (u_1, u_2).

3° J est-elle inversible? Dans l'affirmative, calculer J^{-1}. φ^{-1} est-elle une application bijective de B sur A, de classe C^∞?

4° f est une application de B dans $\mathbb{R}^2$, de classe C^k $(k \geqslant 2)$ et F l'application composée : $F = f \circ \varphi$.

Démontrer que F est une application de A dans $\mathbb{R}^2$, de classe C^k, et qu'en tout point $(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(x_1, x_2) \in A$, elle vérifie la relation :

$$\frac{1}{u_1^2 + u_2^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

5° Utilisant les résultats précédents, montrer que les fonctions f_1 et f_2 définies sur A par :

$$f_1 : (x_1, x_2) \longrightarrow \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_2}$$

$$f_2 : (x_1, x_2) \longrightarrow \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_2}$$

sont deux solutions sur A de l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0.$$

III

Les notations du I et du II sont conservées. Le repère $O, \vec{i_1}, \vec{i_2}$ de l'espace $\mathcal{E}_2$ sera désigné par la notation ρ_0. P est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{E}_2$ définie par :

$$P : (x_1, x_2) \longrightarrow M = O + x_1 \vec{i_1} + x_2 \vec{i_2}$$

et Φ l'application composée : $\Phi = P \circ \varphi$.

1° On pose $\Phi(A) = \mathcal{B}$. Φ est-elle une bijection de A sur $\mathcal{B}$?

2° Pour tout $(u_1, u_2) \in A$, on pose :

$$\Phi(u_1, u_2) = M = O + x_1 \vec{i_1} + x_2 \vec{i_2}$$

et

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u_1} = \vec{e_1}\ ; \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_2} = \vec{e_2}$$

Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans le repère ρ_0.

On désignera par ρ le repère $(M, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

3° Calculer pour $j = 1,2$ et $k = 1,2$ les composantes du vecteur $\frac{\partial \vec{e_j}}{\partial u_k}$ dans le repère ρ_0, puis leurs composantes α_{jk}^i dans le repère ρ.

Démontrer que $\alpha_{jk}^i = \alpha_{kj}^i$.

On se propose maintenant de trouver une méthode permettant de calculer les coefficients α_{jh}^i sans faire intervenir les expressions des vecteurs $\frac{\partial \vec{e_j}}{\partial u_k}$ dans le repère ρ_0. L'étude qui suit est valable dans le cas général où A est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^2$ et φ une bijection de A sur $B = \varphi(A)$ qui est de classe C^k $(k \geqslant 2)$ tout comme l'application réciproque φ^{-1}.

/// /...

4° Désignant par g_{ij} le produit scalaire $\vec{e_i}.\vec{e_j}$ (i et $j = 1,2$) on pose :

$$\sum_{l=1}^{2} g_{il}\alpha^{l}_{jk} = \alpha_{ijk} \quad (i, j \text{ et } k = 1,2)$$

— vérifier que

$$\alpha_{ijk} = \alpha_{ikj}$$

— utilisant le fait que

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\vec{e_i}.\vec{e_j}) = \frac{\partial \vec{e_i}}{\partial u_k}.\vec{e_j} + \vec{e_i}.\frac{\partial \vec{e_j}}{\partial u_k}$$

montrer que, quels que soient i, j et k, les coefficients α_{ijk} vérifient les équations :

$$\alpha_{ijk} + \alpha_{jik} = \frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij}$$

$$\alpha_{jki} + \alpha_{kji} = \frac{\partial}{\partial u_i} g_{jk}$$

$$\alpha_{kij} + \alpha_{ikj} = \frac{\partial}{\partial u_j} g_{ki}$$

5° Déduire des résultats du 4° que, quels que soient i, j et k

$$\alpha_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u_j} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial u_k} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_i} g_{jk}\right]$$

les coefficients α^{i}_{jk} étant alors donnés par :

$$\alpha^{i}_{jk} = \sum_{h=1}^{2} g^{ih}\,\alpha_{hjk} \quad .$$

les g^{ih} étant les coefficients de la matrice g^{-1}, inverse de la matrice g de coefficients g_{ij} (i et $j = 1,2$).

6° Retrouver, en utilisant cette méthode, les résultats du 3°.

IV

Les notations des parties précédentes sont conservées.

Dans cette partie, u_1 et u_2 sont deux fonctions :

$$u_1 : t \longrightarrow u_1(t) \qquad \text{et} \qquad u_2 : t \longrightarrow u_2(t)$$

définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, de classe C^∞.

La variable t étant le temps, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$t \longrightarrow M$$

décrit le mouvement du point $M = \mathcal{P}(u_1, u_2)$ dans $\mathcal{E}$, lorsque t parcourt $\mathbb{R}_+$.

1° Démontrer que la vitesse du point M est donnée par :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{2} v_i \vec{e_i} \qquad \text{où} \qquad v_i = u'_i$$

2° Montrer que l'accélération $\vec{T}$ de M est donnée par :

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^{2} \gamma_i \vec{e_i}, \quad \text{où} \quad \gamma_i = v'_i + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \alpha^{i}_{jk} v_j v_k$$

Calculer effectivement les composantes γ_i en fonction des u_i et de leurs dérivées u'_i, u''_i. Vérifier les résultats obtenus en calculant directement les composantes de $\vec{T}$ dans le repère ρ_0.

3° Quelles conditions nécessaires et suffisantes doivent vérifier les fonctions u_1 et u_2 pour qu'à tout instant, la vitesse du point M soit parallèle au vecteur $\vec{e_2}$? Vérifier que la trajectoire est alors un arc de l'une des courbes C_λ étudiées au I. En tout point de cet arc, calculer les accélérations tangentielle et normale.

4° Si l'on reprend le paramétrage de C_λ sous la forme donnée par la partie I, un mouvement de M sur C_λ sera défini par une fonction :

$$u : t \longmapsto u(t)$$

que nous supposerons de classe C^∞ et monotone. Posant $u' = \Psi(u)$, trouver la condition nécessaire et suffisante à imposer à la fonction Ψ pour que l'accélération tangentielle soit nulle. Étudier la loi du mouvement correspondant.

5° Démontrer de même qu'il est possible de choisir la loi du mouvement de M dans $\mathcal{E}$ de telle manière qu'à tout instant t, la vitesse soit parallèle au vecteur $\vec{e_1}$ et que l'accélération tangentielle soit nulle. Étudier les trajectoires possibles et la loi du mouvement sur l'une quelconque de ces trajectoires.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail